Le concept cartésien de fonction

Journée « Algèbre ou géométrie ? »

Paris 24 mai 2008

(1ére version)

N.B.: Ce qui suit est le texte d'un exposé oral de 50 minutes. Il présente donc inévitablement les limites de ce genre d'exercice, lesquelles ne sont pas toujours des défauts. Il va de soi que je n'ai pu entrer dans de très nombreuses questions, notamment celles soulevées par l'interprétation du Livre III. M'appuyant, dans la préparation de cet exposé, sur mes souvenirs de lecture, je n'ai pas non plus donné toutes les références souhaitables. Ces deux lacunes seront comblées dans une seconde version en préparation. Toutes remarques et critiques, de fond comme de forme, sont bien venues.

Le point de départ des réflexions que je voudrais soumettre à votre appréciation est le suivant.

Dans son étude, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, J.Vuillemin emploie librement dans ses analyses de *La géométrie* le terme de fonction. Le concept de fonction ayant été forgé au XIXe siècle, on pourrait juger qu'il s'agit là d'un cas typique d'illusion rétrospective, la bête noire de tout historien.

Je ne connais pas d'étude sur La géométrie où l'approche de Vuillemin soit critiquée sur ce point.[1] Cependant j'ai constaté au cours de discussions amicales, et parfois, animées, que mon collègue du Ceperc Alain Michel reprochait à Vuillemin cet usage anachronique du concept de fonction. Ce sont ces discussions à bâtons rompus qui sont à l'origine de mon sujet.

[1] D'ailleurs, à l'exception de G.G.Granger, *Essai d'une philosophie du style*, pp.52-54, je ne connais pas d'études où l'approche de Vuillemin soit critiquée en général, sauf si on veut voir de la critique dans l'indifférence. J'estime que la critique que Granger adresse à Vuillemin est hors de propos, néanmoins je m'accorde avec Granger sur plusieurs points de son analyse, notamment les trois suivants : 1) dans son commentaire, il n'emploie jamais l'expression « géométrie analytique » au sujet de La géométrie, 2) La géométrie est avant tout une géométrie métrique, 3) l'algèbre, qui a sa source dans l'entendement, commande la géométrie qui dépend de l'imagination.

Mon propos sera d'essayer de montrer qu'il y a bel et bien un concept de fonction chez Descartes. Mais pour le voir il faut éliminer d'autres anachronismes aux côtés desquels celui que Michel prête à Vuillemin n'a rien à envier.

Avant d'y venir je voudrais faire remarquer que cette interrogation - y a-t-il un concept de fonction dans La géométrie ? - n'est pas totalement étrangère à la question « Algèbre ou géométrie ? » à l'ordre du jour de la présente réunion. En effet, lorsqu'on essaye de comprendre quel était le projet poursuivi par Descartes dans La géométrie on rencontre inévitablement la difficulté suivante : la grille « Algèbre ou géométrie ? » est-elle un guide sûr ou un obstacle à l'intelligibilité du contenu de La géométrie ? J'espère que parmi mes remarques se présenteront quelques éléments permettant d'alimenter la réflexion autour de cette question. Mais notons d'emblée que nous disposons déjà, de façon quasi immédiate, d'un de ces éléments puisque Descartes nous dit dans le *Discours*, comme il l'avait déjà fait dans les *Regulae*, que sa méthode comprend les avantages de la logique, de l'algèbre et de la géométrie sans en avoir les « défauts ». Il y a donc plus que de l'algèbre et de la géométrie et, pour autant qu'il y en ait, il ne devrait pas s'agir exactement de ce qu'on appelait algèbre et géométrie à son époque.

Dernière remarque préliminaire. Je ne suis pas historien des mathématiques et je n'ai pas les compétences requises pour le devenir. De plus, les quelques occasions où j'ai pu me pencher sur le rôle de *La Géométrie* dans l'œuvre de Descartes m'ont enseigné qu'il était sage de ne pas avoir d'idées trop arrêtées sur le sujet. Ce sont donc certains attendus provisoires d'un travail en cours que je propose ici.

J'en viens maintenant à ces anachronismes que j'évoquais à l'instant.

I La géométrie ne s'inscrit pas dans une tradition conduisant à la géométrie analytique.

De toutes les idées reçues au sujet de Descartes, celle qui l'est le plus fait de *La géométrie* l'acte de naissance de la géométrie analytique ou, éventuellement, une étape essentielle de son développement. Cette idée semble si fortement ancrée dans les esprits que même G.Milhaud et J.Vuillemin, qui nous ont donné de si nombreuses raisons pour l'abandonner. la reprennent à leur compte. Sans être exhaustif, car j'y consommerai tout mon temps de parole, je rappellerai cinq remarques, bien connues depuis longtemps, qui me semblent dissiper sans appel cette idée reçue. Pour nous entendre sur les mots, je fais précéder cette petite liste d'une définition de la géométrie analytique.

La géométrie analytique repose sur deux idées.

1) L’introduction des coordonnées, et 2) la représentation, aux moyens de celles-ci, d’objets géométriques par une équation à deux inconnues. Les coordonnées permettent d’associer des nombres à un point. Ces nombres mesurent les distances du point à deux droites qui sont considérées comme des axes numériques orientées que mesurent une même unité. *La géométrie analytique repose donc sur une arithmétisation du plan*.

Je ne sais pas si cette définition satisfera pleinement chacun. Mais une chose est certaine, sans définition préalable de la géométrie analytique, il serait vain de se demander si *La géométrie* participe réellement au développement de cette discipline mathématique.

Voici mes remarques.

1) Si Descartes avait l’intention de représenter un objet géométrique quelconque par une équation pourquoi, pourrait-on déjà se demander avec L.Brunschvicg, ne trouve-t-on même pas dans *La géométrie* l’équation de la droite ? En vérité, dans cet ouvrage, on ne voit à aucun moment Descartes se donner une courbe pour ensuite en chercher la représentation analytique ou en analyser les propriétés.

Milhaud, peut-être parce qu’il est trop évident, ne relève pas ce fait. Mais on trouve dans son recueil d’études *Descartes savant*, de nombreuses observations qui nous mettent en garde contre une assimilation trop précipitée de *La géométrie* à la géométrie analytique.

2) La première observation porte sur l’inexistence de querelle de priorité entre Descartes et Fermat au sujet de l’emploi d’une correspondance entre formules et figures. Ce fait, ou plutôt cette absence de fait, qui incidemment affaiblit l’idée de Descartes créateur unique de la géométrie analytique –mais là, je sais qu’en m’adressant à des historiens des mathématiques, je prêche auprès des convaincus-, laisse évidemment penser que dans l’esprit de Descartes l’usage d’une telle correspondance allait de soi et n’était en rien spécifique à son projet. D’ailleurs, si tel avait été le cas, aurait-il omis d’en parler dans le Discours ? Or, précise Milhaud, le Discours « ne dit pas un mot d’une création qui consisterait à représenter les courbes par des équations » (140). Cependant dès qu’il s’agit des usages de cette correspondance entre figures et formules, on ne trouve plus entre les deux savants que des désaccords. De plus, il est, par contre, permis de penser que Fermat prêtait plus de valeur à cette association des formules aux figures que ne le faisait Descartes, puisque contrairement à ce dernier, il donne dans *l’Isagoge* l’équation de la droite.

Le caractère spécifique de La géométrie réside donc ailleurs que dans cette correspondance et les oppositions manifestes entre les deux mathématiciens plaident d’emblée contre l’idée qu’ils aient pu contribuer communément à une même discipline mathématique.

3) Citons une seconde observation importante de Milhaud au sujet de la Mathesis laquelle, comme il le dit, est la mise en œuvre de la Méthode elle-même – ce que confirme incidemment l'intention initiale de Descartes d'appeler le *Discours Le projet d'une science universelle qui puisse élever notre nature à son plus haut degré de perfection* - et constitue « la première et fondamentale assise de la science cartésienne » :

« "*Je pensai,* dit-il dans le Discours à propos des relations et proportions en général*, que, pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en des lignes, à cause que je ne trouvais rien de plus simple, ni que je pusse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens*…" Quel est lecteur qui ayant pour la première fois ces mots sous les yeux, n'a cru un instant qu'il s'agissait ici de l'idée fondamentale de la géométrie analytique, et de la représentation des relations quantitatives, ou, comme nous disons aujourd'hui, des fonctions à l'aide de lignes courbes ? La traduction latine, où Descartes a ajouté le mot *rectis* à la suite du mot *lineis*, suffit à écarter pareille interprétation ».[2]

Précisons que les segments auxquels pense Descartes sont non seulement des segments de droites mais également qu'ils sont non orientés. Il n'y a pas de segments dont la mesure serait négative, pas d'idée de mesure algébrique. Par conséquent, les objets géométriques étudiés dans *La géométrie* devraient toujours être situés dans le 1[er] quadrant, celui des x et des y positifs et si l'on voulait à tout prix prêter à Descartes l'introduction des fameux axes cartésiens, dont j'ai du mal à voir la trace dans La géométrie, alors il faudrait au mieux parler des demi axes positifs. On peut d'ailleurs tirer une autre conséquence de ce fait. On prête parfois à Descartes l'intention de résoudre toutes les équations algébriques par radicaux. Il est évidemment exact qu'il recourt fréquemment à ce procédé, mais l'exclusion délibérée des racines « fausses », qui est le pendant de l'exclusion de l'idée de mesure algébrique d'un segment, s'oppose directement au programme de la recherche générale des racines d'une équation.

Deux dernières remarques que Vuillemin a beaucoup approfondies.

4) Descartes rejette délibérément de La géométrie les courbes transcendantes, qu'il appelle « mécaniques », pour ne retenir que les courbes algébriques. Cet aspect de l'œuvre mathématique de Descartes est aujourd'hui bien connu et il a été observé dès la publication des œuvres de Descartes par Adam et Tannery. Mais certains historiens des mathématiques semblent y avoir prêter peu d'attention. Par exemple, Smith, l'éditeur de La géométrie, ne mentionne pas Descartes dans son *History of Mathematics* au sujet de la

---

[2] 69-70

découverte de la spirale équiangulaire, découverte qu'il semble prêter exclusivement à Bernoulli. Bien que Descartes ne s'attarde pas sur la description de cette spirale, qu'il se contente d'évoquer dans la lettre du 13 juillet 1938 à Mersenne au sujet de la pesanteur d'un corps roulant sur un plan incliné (AT II, 233), les précisions qu'il donne ensuite rapidement, le 12 septembre, au même correspondant (AT II,360) montrent qu'il connaissait toutes les propriétés de cette courbe. Il faut noter que les historiens de la philosophie ont été plus attentifs à cet aspect de la pensée de Descartes. Par exemple, Belaval, dans son ouvrage classique, *Leibniz critique de Descartes*, qualifie *La géométrie* de géométrie algébrique, ce qui est déjà moins éloigné de la vérité que d'y voir de la géométrie analytique.

Les exemples de transcendantes étudiées par Descartes dans sa correspondance sont nombreux. Il les rejette de *La géométrie* au nom de critères concomitants : ces courbes sont engendrées par deux mouvements indépendants, elles ne sont pas constructibles point par point, leur analyse dépend de raisonnements infinitaires. Si nous joignons cette remarque à la précédente, nous pouvons en conclure que pour Descartes le droit ne peut mesurer le courbe. Ou, pour le dire avec M. Christian Houzel « Descartes croyait impossible la rectification des courbes algébriques en termes finis » (Recherches historiques sur la géométrie algébrique, p.83).

5) Dernière remarque. On trouve dans La géométrie un concept original, je veux dire propre à Descartes, celui de *genre*, dont on s'explique mal que des travaux récents sur La géométrie puissent le passer par pertes et profits. Une lacune peut-être héritée de Smith qui traduit *genre* par *class* et qui explique qu'aujourd'hui, *genre* veut dire autre chose.[3] Je vais m'arrêter plus longuement par la suite sur le genre. Pour l'instant, il me suffit de rappeler que ce concept correspond au nombre de proportions nécessaires pour calculer la longueur d'un segment et qu'il ne coïncide pas avec celui de degré d'une équation algébrique. Ce qui, cette fois, affaiblit, même dans le cadre déjà extrêmement restreint de fonctions algébriques de variables positives à valeurs positives l'idée que la correspondance entre figures géométriques et formules soit centrale dans La géométrie.

Je pense que ces éléments, connus depuis longtemps, je le répète, suffisent amplement pour renoncer à l'idée d'un Descartes œuvrant, aux côtés des mathématiciens du 17e siècle, à la constitution de la géométrie analytique. Je dois d'ailleurs souligner que j'ai laissé de côté un aspect extrêmement important sur lequel je m'arrêterai dans la suite, à savoir

[3] Cette nomenclature provient d'Aristote mais son emploi par Descartes (dès les *Regulae*) en redéfinit complètement le sens.

que les « courbes algébriques » de Descartes contiennent beaucoup plus de trous que de points,

II La géométrie n'est pas un livre de mathématiques pures.

Je voudrais maintenant examiner une autre idée reçue au sujet de *La géométrie*, bien qu'elle le soit de façon beaucoup plus implicite que la précédente. Cette idée consiste à voir dans l'essai de Descartes une œuvre de mathématiques pures et qui, à ce titre, relèverait de la seule histoire des mathématiques.

Contre cette idée, les portes ont été grandement ouvertes par Vuillemin : on ne saurait mieux expliquer les restrictions que Descartes impose aux mathématiques possibles que par ses décisions métaphysiques.[4] La question est de savoir si on ne peut aller plus avant dans cette direction.

Le passage du Discours que j'ai évoqué dans mon introduction, où Descartes annonce qu'il veut cultiver une méthode qui présente les avantages de la logique, de l'algèbre et de la géométrie, sans en avoir les inconvénients, est précédé d'une remarque où Descartes note que l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes « ne s'étendent qu'à des matières forts abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage » (AT VI 17). Il ne s'agit pas de juger de la véracité de ce jugement, mais de noter que dans cette préface aux *Essais* qu'est le *Discours*, où Descartes explique, entre autres, ses intentions au sujet de *La géométrie*, on s'occupera de questions *concrètes* qui ont des *usages*. Et l'un de ces usages n'est pas difficile à déceler. Il suffit de consulter la table des matières de *La géométrie* pour constater que le dernier tiers du Livre II est consacré à l'optique et à la captotrique. J'ignore s'il s'agit là de quelque chose d'exceptionnel, ou si la production des textes mathématiques antérieurs et contemporains nous livrent des exemples similaires, mais on ne peut s'empêcher de noter que les études actuelles sur *La géométrie* n'en font pas grand cas.

L'un des passages les plus connus de *La géométrie* se trouve au Livre II, sous la section que Descartes intitule ainsi (AT VI 412): *Que pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de savoir le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites & la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits*. Le passage en question dit ceci :

---

[4] Détail amusant : il semble bien que l'étude de Vuillemin ait été inspirée par les remarques de J.Hyppolite (« Du sens de la de la géométrie de Descartes dans son œuvre », in Descartes, *Cahiers de Royaumont*, Ed ; de Minuit, 1957) lequel n'avait pas la réputation d'être historien des sciences.

> « C’est pourquoi je croirai avoir mis tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j’aurai généralement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu’on voudra choisir. Et j’ose dire que c’est ceci le problème le plus utile, et le plus général non seulement que je sache, mais même que j’aie jamais désiré savoir en Géométrie ».

Notons la locution « le plus utile » et allons plus avant dans le Livre II (AT, VI, 424) là où précisément commence l’application à la catoptrique et à la dioptrique. « Au reste, nous dit Descartes afin que vous sachiez que la considération des lignes courbes ici proposées n’est pas sans usage, et qu’elles ne cèdent en rien à celles des sections coniques, je veux encore ajouter ici l’explication de certains ovales, que vous verrez être très utiles pour la Théorie de la Catoptrique et de la Dioptrique ».

Suit alors la construction de quatre genres (au sens précis de *La géométrie*) distincts d’ « ovales » par la règle et le compas, dont Descartes affirme, sans le démontrer, qu’elles sont des anaclastiques[5]. Pour le prouver, il recourt alors effectivement au procédé le plus utile et le plus général qu’il n’ait jamais désiré savoir en Géométrie, lequel lui permet de déterminer la tangente en un point quelconque d’une courbe donnée.

La géométrie n’est donc ni abstraite ni privée d’usage, comme le sont l’algèbre des modernes et l’analyse des anciens. D’ailleurs, Descartes dit bien au début du Livre II qu’il veut comprendre toutes les courbes « qui sont en la nature »[6] (AT, VI, 392) et ses biographes nous apprennent que sa rencontre avec Beeckman fut décisive pour ses orientations futures, il avait alors 23 ans, parce qu’elle lui révéla que les mathématiques pouvaient s’appliquer à la physique. Sans compter avec les nombreux textes de la correspondance où il déclare ne pas s’intéresser aux mathématiques pour elles-mêmes.

La leçon directe de ce fait, si nous voulons comprendre les intentions de Descartes dans *La géométrie*, est qu’il faut renoncer à l’autonomie de l’histoire des mathématiques. Il faut abandonner l’idée que l’on puisse atteindre le passé en s’installant dans une discipline. J’espère que personne n’y verra une nouveauté. D’une part, il y a suffisamment de précédents célèbres, avec les travaux de G.Canghuilem et de G.Simon, nous livrant le même enseignement. D’autre part, c’était déjà la leçon de Vuillemin, depuis qui, à mes yeux, le B,

[5] AT VI, 424-31.

[6] Expression qu’il faut évidemment comprendre comme « toutes les courbes qui peuvent appliquées à la connaissance de la nature ». Descartes n’est pas Newton, pour qui les courbes sont effectivement dans la nature à attendre qu’on les découvre. On trouve fréquemment des expressions relâchées dans *La géométrie*. Par exemple (392, l.17) : « … de plus en plus composées par degrés à l’infini ». ces abus de langage s’expliquent par le fait que cet *Essai* s’adresse aux mathématiciens. A charge pour les métaphysiciens qui le liraient de rectifier d’eux-mêmes ces expressions relâchées.

A, BA de l'histoire de *La géométrie* consiste à comprendre pourquoi, une fois qu'on l'a constaté, Descartes rejette les transcendantes de ses mathématiques.

Le fait est que le mot « métaphysique » a aujourd'hui mauvaise réputation. Pour certains historiens des sciences, la métaphysique, c'est ce qui fait obstacle au développement de la science et qui la parasite. Souhaitant trier le bon grain de l'ivraie, ils oublient que la justification métaphysique de la pratique scientifique s'est imposée à Descartes, qui s'en serait volontiers passé, à cause de la logique interne du développement de sa pensée scientifique. L'objet ultime de la métaphysique cartésienne est de fonder la physique, c'est-à-dire de délimiter parmi les éléments du réel ceux dont on peut donner une mesure exacte à l'aide d'une méthode de démonstration dont la certitude soit égale à celle des démonstrations de l'arithmétique et de la géométrie. Le contenu de *La géométrie* est donc sévèrement encadré par la métaphysique, d'un côté, et par la physique (non seulement l'optique et la catoptrique, mais également la mécanique), de l'autre. A ce sujet, il ne faut pas perdre de vue que Descartes est l'inventeur du concept de dimension au sens des équations de dimensions, un concept dont Newton n'a pas su hériter. *La géométrie* n'est donc pas seulement une géométrie physique qui calcule des longueurs, des aires et des volumes, mais une mathématique de la physique qui permet de calculer toutes les grandeurs physiques de la statique et de la dynamique lorsque celles-ci peuvent être calculées avec certitude et exactitude.[7]

III La machine de Descartes

On trouve aux Livres II et III (AT VI, 391 et 443) un instrument bien connu des lecteurs de Descartes. Sa conception est ancienne puisqu'il figure dans les *Cogitationes Privatae* de 1619. Aucune dénomination n'ayant été fixée pour le désigner, j'appellerai à dessein cet instrument *la machine à calculer* de Descartes, appelation qui me permet de laisser sous-entendre mes intentions.

---

[7] C'est-à-dire jamais comme le confirme le fait que les *Principes* ne contiennent pas de formules de physique mathématique. Il s'agit là d'une conséquence directe du holisme physico-cosmologique. Dans une physique des milieux continus où n'existe que l'action par contact, comme l'est celle de Descartes, les parties invisibles et indéfinies de l'univers agissent nécessairement, et de façon inconnaissable, sur les phénomènes locaux. Il n'y a donc pas de systèmes isolés, sinon comme pure vue de l'esprit. Pour cette raison, de même que Descartes traite correctement des transcendantes dans sa correspondance, il y décrit de même correctement les machines simples qui posent des problèmes de physique mathématique à la fois exacts et impossibles. Comme l'a fait voir M.Kobayashi, la méthode de Descartes préfigure, avec le principe des travaux virtuels, la mécanique analytique de Lagrange.

Je vais désormais poursuivre par une série de remarques décousues concernant *La géométrie* que je rapporterai toutes à la machine à calculer, lui faisant jouer pour ainsi dire le rôle d'un référentiel permettant de situer ces réflexions éparses d'un même point de vue.

Si nous nous référons à la seconde remarque de Milhaud, nous constatons que cet instrument permet de construire uniquement des rapports ou des proportions entre segments de droites.

La meilleure manière d'apprendre de la plume de Descartes le plus de choses en le moins de mots sur *La géométrie* est de lire sa lettre à Elisabeth de novembre 1643 :

> « J'observe toujours, en cherchant une question de Géométrie, que les lignes, dont je me sers pour la trouver, soient parallèles, ou s'entrecoupent à angles droits, le plus qu'il est possible ; et je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés. Et je ne crains point de supposer plusieurs quantités inconnues, pour réduire la question à tels termes, qu'elle ne dépendent que de ces deux théorèmes ; au contraire j'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, je vois plus clairement tout ce que je fais, et en les démêlant je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte de multiplications superflues ; au lieu que si on tire d'autres lignes, et qu'on se serve d'autres théorèmes, bien qu'il puisse arriver, par hasard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutefois il arrive quasi toujours le contraire. »

De fait, la contemplation de l'instrument permet d'y voir autant d'occasions qu'on le souhaite d'appliquer les théorèmes de Thalès et de Pythagore et, peut-on ajouter, rien d'autre. Ces applications potentielles de ces deux théorèmes présentent cependant une particularité. Descartes montre que les lieux géométriques construits par la règle et le compas, exposés au Livre I, peuvent tous êtres également obtenus par la machine à calculer lorsqu'elle n'a qu'une équerre mobile. Quelle différence y a-t-il entre l'usage des premiers et celui de la seconde ? Si un lieu géométrique constructible par la règle et le compas nous est donné, on ne peut déterminer, à partir de cette seule donnée, combien de fois et dans quel ordre ont été employés ces instruments. De sorte que la réversibilité de l'analyse et de la synthèse n'apparaît pas clairement. Par contre, si l'on emploie un seul instrument, comme la machine à calculer, cet indéterminisme disparaît. Rapporté au projet de Descartes, c'est-à-dire construire une « science générale qui explique tout ce qu'il est possible de rechercher touchant l'ordre et la mesure, sans assignation à quelque matière particulière », les constructions par la règle et le compas satisfont aux conditions auxquelles est assujettie la mesure mais elles ne respectent pas celles imposées par l'ordre, ce que fait, par contre, la machine. Cette exigence cartésienne de la réversibilité de l'analyse et de la synthèse coupe à la racine la possibilité éventuelle d'une distinction entre géométrie synthétique et géométrie analytique et peut vraisemblablement être vue comme une critique des tentatives passées annonçant le projet d'une géométrie métrique synthétique (axiomatique).

Une autre façon de présenter les choses est de remarquer que lorsque nous construisons les points d'un lieu géométrique avec la règle et le compas, nous ne le faisons pas par un mouvement continu, comme avec la machine, mais par une suite de mouvements interrompus. Ce qui m'amène à une autre question, qui est peut-être sous-jacente aux réticences d'Alain Michel à admettre qu'il y ait un concept de fonction dans *La géométrie*: qu'est-ce que le continu chez Descartes ?

Est continu ce qui n'est pas interrompu. Par exemple, même si Descartes, à ma connaissance, ne s'exprime pas sur ce sujet, le calcul d'une irrationnelle par une fraction continue est continu. Le mouvement par lequel j'ouvre les deux branches de la machine à calculer pour, par exemple, amener la 1ere équerre glissante en un point déterminé *d*, est continu. Est-ce à dire que Descartes est victime de cette illusion, partagée semble-t-il par tous les mathématiciens des 17^{e} et 18^{e} siècles, qui fait dépendre la représentation de la variation continue d'une grandeur d'une image cinématique ? Illusion que dissipera l'analyse du 19^{e} siècle en forgeant le concept de limite. Nous avons, si nous nous tournons un instant vers l'œuvre de Descartes, toutes les raisons de penser le contraire.

D'abord, même si cet aspect paraît totalement étranger au contenu de *La géométrie*, l'imagination, c'est-à-dire les représentations ou les figurations claires et distinctes que nous formons en nous des choses qui sont hors de nous, ne peut dépendre de la sensation. C'est, me semble-t-il, précisément pour cette raison que Descartes a modifié le statut du contenu de *La géométrie*. Dans les *Regulae*, le contenu de La géométrie est déjà présent *in nuce* et il se suffit à lui-même. Descartes, à ce stade, pensait que l'abandon des deux principes aristotéliciens de l'incommunicabilité des genres (impossibilité de démontrer une proposition de géométrie par une proposition de l'arithmétique et réciproquement) et de l'homogénéité (impossibilité, par exemple, d'ajouter une longueur à une aire), abandon qu'encode directement la théorie des proportions continues, suffisait pour pouvoir appliquer la science générale de l'ordre et de la mesure. Mais dans certains passages des *Regulae*, l'imagination dépend de la sensation et il semble hors de doute que c'est en constatant ce fait, et les difficultés qu'il entraînait pour le projet de la *Dioptrique*[8], que Descartes se soit résolu à abandonner la rédaction de cet ouvrage. En d'autres termes, pour pouvoir appliquer la machine à calculer à la détermination de toutes les courbes qui sont dans la nature, il faut justifier l'application de la machine aux

---

[8] Comme l'a établi G.Simon, pour dépasser les difficultés de la Dioptrique de Képler, Descartes a dû poser que c'est l'âme qui sent (qui voit) et non pas le corps, avec son organe l'œil.

choses matérielles. Cette justification est l'objet de la métaphysique, justification, je le répète, dont Descartes se serait bien passé car à l'époque des *Regulae*, il éprouvait encore moins d'attrait pour celle-ci que pour l'exercice des mathématiques pures. De sorte que, de la place dominante qu'elle avait en 1628, *La géométrie* occupe en 1637 une place subordonnée à la métaphysique. *Elle ne peut plus se suffire à elle-même parce qu'il faut l'immuniser contre la sensation*.

Ensuite, il est bien connu que chez Descartes la conception du mouvement, comme l'a judicieusement dit Bergson, est cinématographique. Le mouvement n'existe que quant à nous. C'est une apparence et, pourrait-on faire dire à Descartes, lorsque nous voyons la projection d'une diapositive d'une nature morte, nous n'avons pas les moyens de la distinguer d'un plan fixe de la même nature morte projetée à 24 images par seconde. Cette conception du mouvement, ou plutôt de son inexistence, est évidemment liée à l'inexistence du temps comme grandeur physique mesurable. D'ailleurs, s'il existait un temps dont la mesure ne se ramène pas à celle de l'espace, alors la mesure du mouvement mettrait en jeu le rapport de deux métriques indépendantes comme pour le cas des transcendantes.

Ne reposant pas sur la sensation et excluant toute ontologie du mouvement, les conceptions de Descartes ne peuvent donc tomber sous la critique du concept contemporain de limite comme c'est le cas pour celles des mathématiciens du 17e siècle qui ont contribué au développement du calcul.

Ces remarques me permettent de compléter ce que je disais plus haut. Les deux restrictions : courbes algébriques et contenues dans le premier quadrant, ne suffisent pas à caractériser les lieux étudiés dans *La géométrie*. Ces lieux sont *inclus* dans les courbes algébriques du premier quadrant, mais ils ne les remplissent pas. Et pour cause : pour aller de l'abscisse 1 à l'abscisse 2, en prenant pour axe des abscisses la branche YZ de la machine, il faut bien passer par $\pi/2$! (il n'y a pas de proportion entre nombres rationnels ou algébriques qui soit égale à cette valeur). On peut, si on le souhaite, appeler les courbes étudiées dans *La géométrie algébriques* si on entend par là des courbes dont les coordonnées des points sont des nombres algébriques. Mais les « fonctions » représentées par ces courbes ne sont nulle part continues, au sens du terme employé dans les enseignements de la licence de mathématiques.

Pour préciser cette question de la nature du continu chez Descartes et essayer de fixer les idées, permettez-moi de faire une rapide digression.

On peut, à l'égard du continu, avoir deux types d'exigence que l'on confond souvent mais qui, si on y regarde de près méritent d'être distinguées. La première est de requérir que notre concept de continu soit exempt de contradiction. La deuxième est de demander ce qu'*est* le continu. Cette seconde exigence appelle une réponse unique, tandis que le réquisit de cohérence peut être satisfait de plusieurs manières. J'en veux pour preuve que Poincaré, au chapitre 2 de *Science et hypothèse*, se contente de formuler la première exigence en montrant que nous avons liberté de choix pour satisfaire la seconde. Partant de l'idée spontanée de continu, qu'il appelle le continu physique, il vérifie que celle-ci implique des paralogismes dus à la sensation et que, pour éliminer ces paralogismes, le continu mathématique doit être vu comme un ensemble d'éléments séparés les uns des autres. La condition générale que doivent satisfaire ces ensembles d'éléments est l'intercalage : un ensemble d'éléments est un continu si entre deux éléments quelconques, je peux toujours en intercaler un troisième. Mais, en ce sens, les rationnels forment déjà un continu. Et il ne s'agit évidemment pas du seul ensemble de nombres répondant à cette condition. D'ailleurs, en dehors de la solution adoptée majoritairement par les mathématiciens actuels, Poincaré cite des exemples d'ensembles de nombres, aujourd'hui oubliés, répondant à cette condition de continuité.

Il saute aux yeux que la machine à calculer de Descartes répond à cette condition. Cette remarque tempère l'idée de progrès, telle que l'histoire des mathématiques se la représente. Car si les analystes du 19e siècle ont dû rendre l'analyse impeccable, comme le dit Poincaré, c'est bien parce que les inventeurs du calcul avaient fait reposer l'idée de continu sur la sensation lorsqu'ils faisaient tendre un point vers un autre en imaginant les points comme des mobiles se déplaçant sur des lignes.

La conception du continu de Descartes-Poincaré présente cette particularité de reposer sur l'infini potentiel : il n'est pas nécessaire que les éléments du continu soient donnés en acte ; il suffit que l'intercalage soit toujours possible. Dans ce cadre, radicalement différent de celui adopté par Dedekind et Cantor, la distinction entre fonction différentiable et fonction continue ne peut être formulée et, plus généralement, ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des fonctions ne peut être développée.[9] Si c'est à cette idée de fonction que pense Vuillemin – mais est-ce vraiment le cas ?- alors Michel a raison de protester.

---

[9] On pourrait se demander comment Descartes pouvait se satisfaire d'une conception aussi « rudimentaire » du continu. La réponse, me semble-t-il est à chercher à nouveau dans le concret et l'utile. Les recherches de La géométrie sont, d'une certaine façon, subordonnées aux exigences de l'optique et les exigences de cette dernière déterminent la conception des prototypes d'instrument de taille des verres que Descartes destine à Ferrier. Or le fonctionnement de ces outils agira, du point de vue de la sensation, de façon continue. Ce mode ultime d'action n'exige donc pas que l'on rentre dans les difficultés du continu.

Jusqu'ici, c'est la première des idées clés de la géométrie analytique, l'arithmétisation du plan, qui a été confronté à *La géométrie*. Cette confrontation, si l'on se place du point de vue de la terminologie de Descartes, portait sur la mesure. Il reste à comprendre, en se plaçant du point de vue de la géométrie analytique, ce qu'il en est de la seconde idée essentielle de cette discipline, celle de la représentation de certains objets par certains autres. Pour respecter la terminologie de Descartes on rapportera, cette fois, le thème de la représentation à celui de l'ordre.

Avant d'y venir, levons d'emblée deux interrogations qui n'ont plus lieu d'être au vu des progrès réalisés ces dernière années en histoire des idées et en histoire des sciences.

Que l'idée de représentation soit au cœur de *La géométrie* est une évidence qui découle du fait que Descartes est l'acteur principal d'une révolution de pensée qui fit passer les savoirs de l'Âge de la similitude à l'Âge de la représentation. C'est la leçon de Foucault dans *Les mots et les choses*. G.Simon en a donné, si j'ose dire, une confirmation expérimentale spectaculaire en comparant les Dioptriques de Képler et de Descartes. Après avoir constaté que pour Descartes la géométrie était utile pour déterminer les anaclastiques, nous ne pouvons plus nous permettre ni d'ignorer ce contexte général dans lequel s'inscrit *La géométrie*, ni de laisser de côté le thème de la représentation lorsque nous voulons la comprendre.

Que, s'il faut choisir, ce soit les lieux géométriques qui représentent les équations, et non pas l'inverse, est une conséquence triviale de la philosophie de Descartes. Nous en avons déjà parlé : l'imagination, siège des figures, est subordonnée à l'entendement, siège des raisons. L'exemple de bon sens donné par le philosophe, il est aussi facile de concevoir un chilogone qu'il est difficile de l'imaginer, parle de lui-même. Je m'arrête sur cette question qui ne mérite aucun examen uniquement parce que j'ai constaté qu'elle avait été l'objet de controverses entre historiens des mathématiques. Il est également étonnant qu'un lecteur aussi perspicace que Milhaud ait pu penser que les courbes étaient représentées par les équations.

C'est donc à un autre titre que la question de la représentation doit nous intéresser.

Mais ici nous rencontrons une difficulté. Nous avons vu que l'hypothèse selon laquelle la géométrie s'inscrirait dans le mouvement de pensée qui conduit à notre actuelle géométrie analytique n'était pas tenable. De là, soit nous concluons que les mathématiques cartésiennes conduisent à une impasse, comme on le pense généralement de sa physique, soit nous nous demandons s'il n'y a pas un autre axe du développement de la pensée scientifique à laquelle nous pouvons la rattacher.

Telle que je vois les choses, la théorie des fonctions est née des difficultés rencontrées par la géométrie analytique au sujet du continu. Mais une fois forgé, le concept de fonction a connu le même sort que tous les concepts mathématiques importants. Il est devenu l'objet d'études spécifiques. Parmi les questions que les mathématiciens se sont posées à son sujet, nous trouvons la suivante : quelles sont les fonctions effectivement calculables ? Une interrogation qui a donné naissance à deux disciplines très voisines : la théorie des fonctions récursives et la théorie des automates abstraits. Théories auxquelles nous devons ces objets si familiers que sont nos ordinateurs.

Prenons comme hypothèse de travail que *La géométrie* appartient à cette filière, souvent interrompue, de la pensée scientifique qui conduit à la théorie de la calculabilité et à la théorie des automates et voyons si nous pouvons trouver dans les intentions de l'auteur de *La géométrie* des éléments qui viennent l'appuyer. Le pire des risques que nous encourions avec une telle hypothèse est qu'elle soit aussi fantaisiste que celle apparentant *La géométrie* à la géométrie analytique.

IV Science de l'ordre sans mesure

J'ai appelé l'instrument de Descartes « machine à calculer » alors que Vuillemin le nomme « équerres mobiles », mais, comme le dit celui-ci, la « figure instrumentale peut (…) être nommée une véritable machine à proportions » ou encore « elle peut être regardée comme une machine à extraire les racines ». Faut-il ajouter qu'il n'y a pas lieu de s'étonner de trouver ici une marque de ce mécanisme qu'on a jamais cessé de reprocher à Descartes ?

La machine à calculer de Descartes est d'une certaine manière le dessin, la représentation, de sa philosophie : les équerres de la première sont liées les unes aux autres comme le sont les raisons dans la seconde. Y a-t-il une science de l'ordre pur, c'est-à-dire de l'ordre sans la mesure, chez Descartes ? Oui, c'est la métaphysique, dont, nous dit-il, les vérités sont plus faciles à démontrer que celles de la Géométrie. La machine ne représenterait que cet ordre si ses équerres étaient toutes molles et que l'ouverture du compas permette simplement de les distinguer. Leurs écarts correspondant aux morceaux du temps, non mesurables mais ordonnés linéairement, dans lequel se déploie ma pensée lorsque je l'assujetti à la production d'idées claires et distinctes. Plusieurs idées sont ensemble dans mon esprit. Je dois les séparer (distinguer) et les ordonner selon une relation de consécution qui fait dépendre la n^e de la $n\text{-}1^e$ au sens où celle-ci est incluse dans celle-là. La science de l'ordre pur, qui n'est pas une science pure, puisqu'elle s'applique à la métaphysique, a ses propositions et ses déductions propres. En voici un exemple :

L'infini est un être plein et réel. Le fini est la négation de l'infini. La négation d'un être n'est pas un être. L'indéfini est la négation du fini. La négation d'un non-être n'est pas un être.

Dans cette démonstration, où Descartes repousse la loi de la double négation appliquée à l'idée d'infini,[10] et dont j'entends des échos dans des textes des *Regulae* et du *Discours* (« il ne faut jamais prendre le faux pour le vrai », c'est-à-dire les raisonnements par l'absurde sont proscrits) peut-être rapporté à la machine à calculer. Celle-ci n'a qu'un nombre indéfini, entendez non borné, d'équerres. C'est une machine à nombre fini d'états, comme le sont nos automates abstraits. Les démonstrations de la science de l'ordre sans la mesure, comme la démonstration métaphysique précédente, procèdent par disproportion : si j'ai un nombre infini d'équerres, je ne peux trouver de proportion entre les segments déterminés par la dernière et la n^{ieme} pour n quelconque.

Ce que je viens d'appeler « états », Descartes l'appelle « genre ». Le genre d'un problème est égal au nombre d'équerres mobiles qu'il faut employer pour le résoudre. Le genre mesure donc la complexité de la construction d'un segment recherché.

Vuillemin donne un tableau éclairant qui explicite les relations entre genre et nombre de lignes dans le problème de Pappus. Il commente cet inventaire ainsi : « Chacune des courbes que [la machine] permet de construire correspond à un genre déterminé de courbes algébriques, et par conséquent à la solution, ordonnée selon la difficulté croissante du nombre des lignes, du problème de Pappus » (p.111). Mais il n'y a pas lieu de caractériser le genre par les propriétés des choses qu'il permet de décrire ou des problèmes qu'il permet de résoudre, comme Vuillemin paraît le laisser entendre. Le genre est un critère intrinsèque de la complexité interne des calculs de la machine. Ce thème de la complexité du calcul a été et demeure central dans les recherches contemporaines sur les machines abstraites. Et ici une remarque complémentaire s'impose.

Deux pages après la présentation de la machine à calculer, Descartes introduit un autre instrument (AT VI, 395). Celui-ci, contrairement à la machine à calculer, ne possède pas

---

[10] Je ne peux m'empêcher d'y voir des similitudes avec ce que Brouwer appelait le théorème de l'absurdité :

(1) l'équivalence de la correction et de l'absurdité de l'absurdité est rejetée par l'intuitionnisme
(2) pour l'intuitionnisme l'absurdité de l'absurdité est conséquence de la correction
d'où suit le théorème:
(3) l'absurdité de l'absurdité de l'absurdité est équivalente à l'absurdité
qui permet à l'intuitionnisme de réduire
(4) *toute suite finie de prédicats d'absurdité soit à l'absurdité soit à l'absurdité de l'absurdité.*

un nombre indéfini d'organes, mais un nombre fixe. Cependant, l'un d'entre eux, la ligne droite CNK, peut être remplacé par une courbe d'un genre quelconque. Lorsque l'input (la ligne CNK) est une droite, la machine calcule les points d'un lieu du premier genre. Lorsque, l'input est de genre n, l'output sera de genre n+1. Cette nouvelle machine prend donc comme input un objet qu'elle peut produire elle-même. Il est difficile de ne pas voir ici quelque chose de semblable au schéma de récursion primitive

$$h(x, 0) = f(x), \quad h(x, s(y)) = g(x, y, h(x, y))$$

qui permet de définir une fonction par elle-même. Un fait s'oppose à ce que l'on pousse ce parallélisme trop loin ; la machine n'a pas de registre pour stocker l'output de son calcul précédent. Par contre, on ne trouve pas cette absence de mémoire dans la machine à calculer qui exhibe tous les registres possibles et leurs dépendances mutuelles.

Ces considérations sommaires me suffisent pour acquiescer pratiquement au propos de Vuillemin : « On voit en quel sens restreint on peut parler de fonction dans la Géométrie de Descartes : est fonctionnelle une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques ». La seule précision qui me semble devoir être ajoutée est que ce n'est pas en un sens restreint qu'on peut parler de fonction mais en un sens particulier : celui de fonction effectivement calculable par une machine finie. Il ne s'agit donc pas de la restriction d'un concept familier mais d'un autre concept tout aussi familier. Dans cette perspective, la limite de l'approche cartésienne tiendrait au fait que ses machines à calculer sont analogiques alors que les nôtres sont numériques.[11]Ce qui ne l'empêche pas de traiter de problèmes propres à la théorie des machines comme celui de la complexité.

Que peut-on conclure des réflexions précédentes au sujet de la question « Algèbre ou géométrie ? ». La théorie des proportions continues, qui intègre les idées d'ordre et d'ordre de complexité, est la ligne de crête de La géométrie. A cette ligne de crête correspondent les deux versants du nombre et de la figure, versants qui sont tous deux des signes représentatifs des proportions. Lorsqu'on examine *La géométrie* sous la seule perspective des rapports de l'algèbre et de la géométrie, on creuse un tunnel sous la conception cartésienne des mathématiques pour en relier deux aspects qui, par constitution, y jouent un rôle subalterne. On gauchit ainsi la nature de *La géométrie* en l'amputant de ce qui relève de l'ordre, c'est-à-

[11] L'histoire de l'informatique nuance cette réserve puisque, par exemple, le premier prototype d'ordinateur, l'ENIAC, était analogique. Von Neumann a imposé, avec l'EDVAC, l'idée de calculateur numérique car ceux-ci pouvaient être programmables contrairement aux calculateurs analogiques.

dire de cette partie qui présente les avantages de la logique sans en avoir les inconvénients, et qui est la marque spécifique des mathématiques cartésiennes. Pourtant, la logique, dont l'objet est d'étudier le raisonnement correct, fait partie du tableau général du savoir contemporain au même titre que la géométrie analytique ou la géométrie algébrique.[12] Il semble donc, pour le moins, souhaitable d'en tenir compte dans l'histoire de la pensée mathématique.

---

[12] J'ai tenté, avec les moyens qui sont les miens, d'analyser la logique de Descartes à l'aide des outils de la logique contemporaine dans « Incidences des progrès de la logique mathématique sur la classification des systèmes philosophiques », texte d'une communication au colloque *Jules Vuillemin, l'un et le multiple*, Clermont-Ferrand, novembre 1999, dont je n'ose plus annoncer la parution. Bien que cette analyse soit loin d'être entièrement satisfaisante, elle montre au moins combien la question de la caractérisation formelle de ce qu'est le raisonnement correct chez Descartes est délicate.